

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

Възрастова група XI-XII клас – теоретичен кръг – решения

1 задача. Космическа катастрофа.

Решение:

За да определим скоростта на сблъсъка на планетата със звездата, трябва първо да определим скоростта на планетата в периастр. Ще използваме закона за запазване на енергията и втория закон на Кеплер.

От закона за запазване на енергията следва:

$$\frac{m_J v_a^2}{2} - \frac{\gamma m_J M_{Vega}}{r_a} = \frac{m_J v_p^2}{2} - \frac{\gamma m_J M_{Vega}}{r_p}$$

където m_J е масата на планетата, M_{Vega} е масата на Вега, v_a и v_p са скоростите на планетата в апоастр и периастр, а r_a и r_p са разстоянията от планетата до звездата в апоастр и периастр. Трябва да имаме предвид, че разстоянието в периастр е равно на радиуса на Вега.

Записваме и втория закон на Кеплер, който за двете характерни точки на орбитата, в които моментната скорост е перпендикулярна на радиус-вектора, има следния вид:

$$r_a v_a = r_p v_p$$

От това уравнение изразяваме скоростта v_a чрез другите величини и заместваме в първото уравнение. След елементарни преобразования получаваме следния израз за скоростта в периастра на орбитата, т.е. в момента на сблъсъка на планетата със звездата:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Vega} \cdot r_a}{r_p \cdot (r_a + r_p)}}$$

Обръщаме внимание, че изразът $r_a / (r_a + r_p)$ е много близък по стойност до единица, поради това, че r_p е много по-малко от r_a . Получаваме разлика от две единици в четвъртия знак. Затова при пресмятанията може да използваме формулата:

$$v_p \approx \sqrt{\frac{2\gamma M_{Vega}}{r_p}}$$

Виждаме, че това е формулата за втора космическа скорост за повърхността на Вега, което можеше да се очаква предвид голямата разлика в периастрното и апоастрното разстояние.

Пресмятаме, използвайки масата на Слънцето от справочните данни, и получаваме:

$$v_p \approx 538 \text{ km/s}$$

Това, обаче, не е скоростта, с която планетата ще се сблъска с Вега. Вега се върти много бързо, а планетата се движи по орбитата си в посока, противоположна на въртенето на звездата около оста ѝ. Сблъсъкът се осъществява в атмосферата на

звездата. Затова планетата взаимодейства с веществото от атмосферата, което се движи срещу нея с линейна скорост, определена от скоростта на околоосно въртене на звездата. Да пресметнем линейната скорост на движение на точка от фотосферата на Вега. За целта разделяме дължината на екваториалната обиколка на Вега на периода на въртене:

$$v_{rot} = \frac{2\pi R_{Vega}}{T_{Vega}} = 274 \text{ km/s}$$

Виждаме, че линейната скорост, с която се върти атмосферата на Вега, е много голяма, по-голяма от скоростта на планетата в периастръа на елиптичната орбита. Относителната скорост на планетата спрямо атмосферата на Вега получаваме като съберем двете скорости. Събираме скоростите поради това, че планетата и атмосферата на звездата, в момента на сблъсък, се движат в противоположни посоки.

$$v = v_p + v_{rot} = 812 \text{ km/s}$$

Това е скоростта, при която се осъществява сблъсъкът на планетата със звездата. Тази скорост трябва да се използва при пресмятане на енергията, отделена при удара. Предполагаме, че цялата кинетична енергия се преобразува в друг вид енергии. Тогава отделената енергия е равна на кинетичната енергия на сблъсък:

$$E_k = \frac{m_J v^2}{2} \approx 6.23 \cdot 10^{38} \text{ J}$$

Светимостта на звездата получаваме от закона на Стефан-Болцман:

$$L_{Vega} = 4\pi\sigma R_{Vega}^2 T_{Vega}^4 \approx 1.97 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

Можем да използваме и информацията от условието на задачата, че Вега има 40 пъти по-висока светимост от Слънцето и следователно $L_{Vega} = 40 L_s \approx 1.54 \times 10^{28} \text{ W}$.

Виждаме, че енергията отделена при сблъсък е приблизително 40000000000 (четиридесет милиарда) пъти по-голяма от енергията, която звездата излъчва за една секунда. Разбира се, тази енергия не се отделя за една секунда, но количеството ѝ е впечатляващо.

Това можеше да се очаква, защото едни от най-мощните процеси във Вселената, избухванията на свръхнови звезди, както и процесите ставащи в квазарите, всъщност се дължат на отделена кинетична енергия – в първия случай това е колапс на звезда (става дума за свръхнови звезди от II тип), а във втория е падане на големи количества вещество под действие на мощните гравитационни полета на свръхмасивни обекти.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правлен математически метод за определяне на скоростта на планетата в периастръй – 5 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За определяне и отчитане на скоростта на въртене на повърхността на Вега – 4 т.

За правилен краен резултат за енергията – 1 т.

За пресмятане на светимостта на звездата – 2 т.

За сравнение и с енергията на планетата и извод – 2 т.

2 задача. Лунни спътници.

Решение:

1. Наблюдател на лунния полюс.

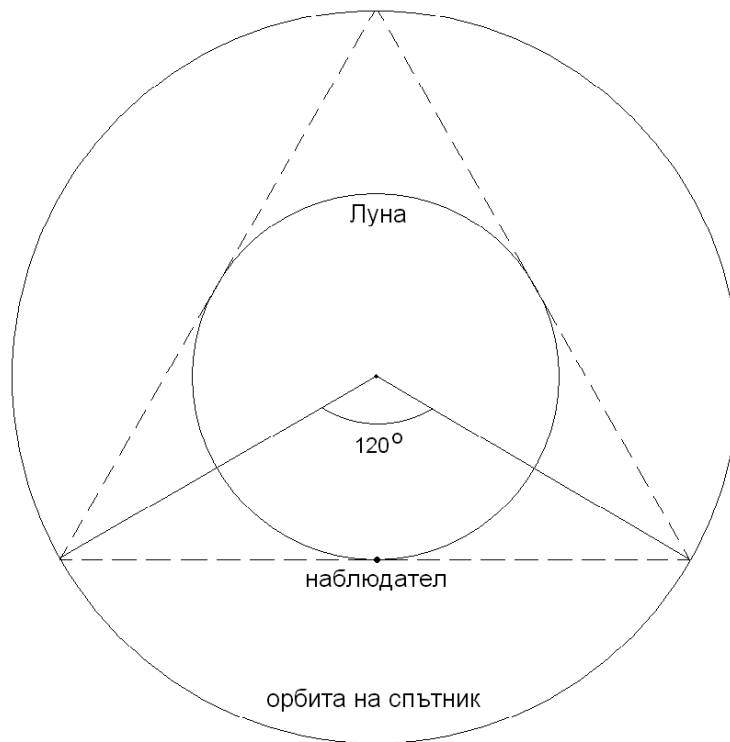
За да бъде една трета от орбитата на спътника над хоризонта, трябва централният ъгъл на този участък от орбитата да е 120° . Възможен е само един случай, при който радиусът на орбитата на спътника е два пъти по-голям от радиуса на Луната. В този случай фигурата на Луната се вписва в равностранен триъгълник, който от своя страна е вписан в орбитата на спътника (Фиг.1). Периодът на обикаляне на спътника може да се намери от формулата за кръгова скорост или от третия закон на Кеплер, като използваме масата и радиуса на Луната от справочните данни.

Според третия закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

Следователно:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$



Фиг.1

Понеже радиусът на орбитата е два пъти по-голям от радиуса на Луната, след заместване на голямата полуос a с удвоения радиус на Луната, получаваме:

$$T = 4\pi R \sqrt{\frac{2R}{\gamma M}} = 18390^s = 5^h 06^m 30^s$$

2. Наблюдател на екватора.

Щом спътниците изгряват от изток или запад и залязват на запад или изток, като при това преминават през зенита на наблюдателя, то те се движат по екваториална орбита. Луната, макар и бавно, се върти около своята ос. Следователно, за наблюдател

на екватора на Луната, спътниците няма да се завъртат за един свой сидеричен период, а за един синодичен период, който е по-голям или по-малък, в зависимост от това дали спътникът се движи по посоката на въртене на Луната или в противоположна посока. Затова спътниците няма да залязват едновременно, а един след друг. За спътника движещ се в права посока синодичния период получаваме от уравнението:

$$\frac{1}{T_{Syn}} = \frac{1}{T_{Sid}} - \frac{1}{T},$$

$$T_{Syn} = \frac{T \cdot T_{Sid}}{T - T_{Sid}} = 5^h 08^m 54^s$$

За спътника движещ се в обратна посока:

$$\frac{1}{T'_{Syn}} = \frac{1}{T_{Sid}} + \frac{1}{T},$$

$$T'_{Syn} = \frac{T \cdot T_{Sid}}{T + T_{Sid}} = 5^h 04^m 08^s$$

Това са синодичните периоди на двата спътника за наблюдател на екватора. За да изминат една трета от орбитата си, в система свързана с наблюдателя на екватора, на спътниците ще е необходимо време равно на една трета от синодичния им период.

За спътника движещ се в права посока:

$$t = \frac{T_{Syn}}{3} = 1^h 42^m 58.1^s,$$

а за спътника, движещ се в обратна посока:

$$t' = \frac{T'_{Syn}}{3} = 1^h 41^m 22.6^s$$

Разликата между двете времена дава интервала от време между залеза на единия спътник и залеза на другия спътник. Първи ще залезе спътникът с по-кратък синодичен период. Това е спътникът движещ се обратно на въртенето на Луната. След него ще залезе спътникът движещ се в права посока. Интервалът между двата залеза е:

$$\Delta t = t - t' = 1^m 35.4^s = 95.5^s$$

Поради различната видима ъглова скорост, за наблюдател намиращ се в центъра на Луната и въртящ се с нея, спътниците до момента на срещата ще изминат различни дъги от видимата от повърхността на Луната част от орбитата. Отношението на дължините на тези дъги (l и l') е право пропорционално на отношението на видимите ъглови скорости, или обратно пропорционално на отношението на периодите на спътниците, както и на отношението на третините на тези периоди:

$$\frac{l}{l'} = \frac{T'}{T} = \frac{t'}{t},$$

Освен това сумата от дъгите е 120° :

$$l + l' = 120^\circ$$

Решаваме тази система уравнения относно l' и l и за разликата им получаваме:

$$l' - l = 120^\circ \left(\frac{t - t'}{t + t'} \right) = 56' 01''.4 \approx 56'$$

Следователно по-бързият спътник от изгрева си до срещата ще измине дъга от 60° плюс $56' / 2 = 28'$, а по-бавният ще измине дъга от 60° минус $28'$. Това означава, че за наблюдател в центъра на Луната срещата на двата спътника ще се осъществи в точка, отстояща на $28'$ от зенита в посока запад. Но ние разглеждаме наблюдател на лунната повърхност, който се намира два пъти по-близо до орбитата на спътниците. Тъй като

Ъгълът е малък, може да приемем, че същата дъга от орбитата на спътниците наблюдателят от повърхността на Луната ще вижда под два пъти по-голям ъгъл. Следователно зенитното отстояние на точката на разминаване на двата спътника е:

$$z \approx 56'.$$

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилен начин на определяне на радиуса на орбитата и периода на полярния спътник – 2 т.

За верни числени резултати – 2 т.

За обяснение защо двата екваториални спътника няма да залязат едновременно – 1 т.

За правилен метод на пресмятане на разликата във времената на залез – 4 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За правилен метод за определяне на точката на срещата на спътниците – 3 т.

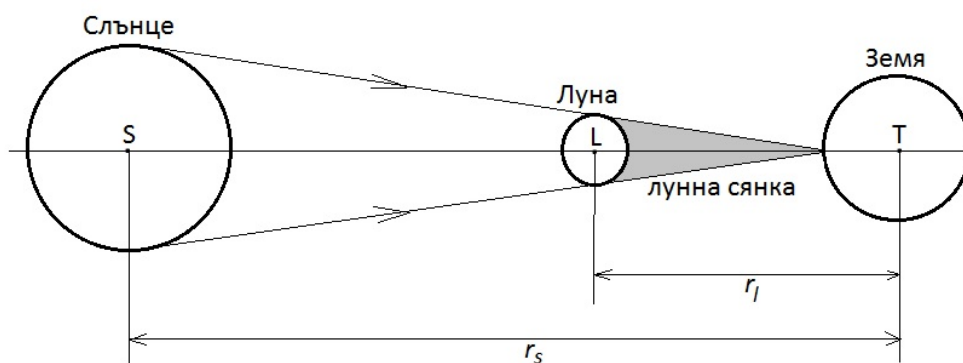
За верен числен резултат – 1 т.

За отчитане на факта, че наблюдателят е на повърхността, а не в центъра на Луната – 1 т.

3 задача. Затъмнение.

Решение:

Времетраенето на пълната фаза на едно слънчево затъмнение се определя от това с колко видимият ъглов размер на Луната превишава видимия ъглов размер на Слънцето. По друг начин казано, това е времето, за което лунната сянка преминава през наблюдателния пункт. Поради елиптичната форма на лунната орбита около Земята и на земната орбита около Слънцето, при различни случаи на слънчево затъмнение видимите ъглови размери на Слънцето и на Луната могат да са различни. Сянката на Луната има конусовидна форма. Ако пълната фаза на слънчевото затъмнение трае само миг, това означава, че върхът на конуса на лунната сянка се опира в земната повърхност. Схемата на затъмнението в този случай изглежда така:



За земен наблюдател видимите ъглови размери на Луната и Слънцето при такова затъмнение са еднакви. Наблюдателят е застанал на екватора, Слънцето и Луната за него са в зенита.

Да означим с r_s и r_l разстоянията от центъра на Земята до центровете на Слънцето и на Луната. Нека R_t , R_l и R_s са радиусите на Земята, Луната и Слънцето. Както се вижда от чертежа, в сила е следното съотношение:

$$R_l / R_s = (r_l - R_t) / (r_s - R_t)$$

Оттук намираме разстоянието между центровете на Земята и Луната:

$$r_l = (r_s R_l + R_t(R_s - R_l)) / R_s$$

$$r_l \approx 379\,900 \text{ км}$$

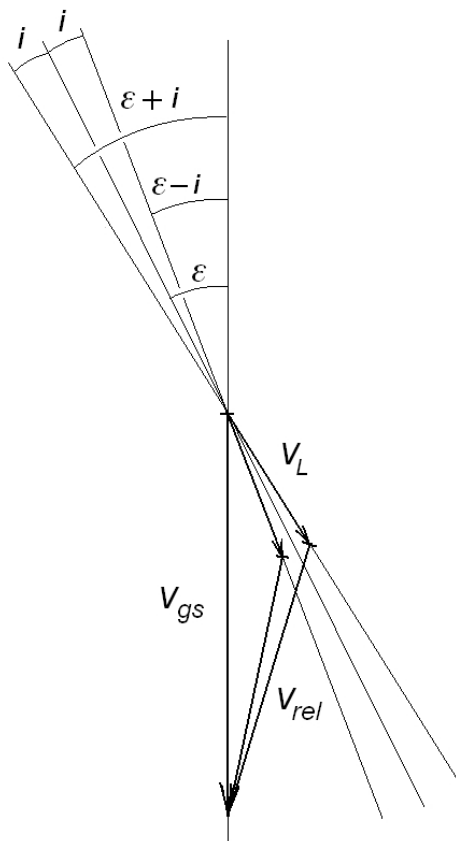
Да определим скоростите v_l и v_{gs} , с които се движат по орбитите си Луната и спътникът. Означаваме с T_l периода на обикаляне на Луната около Земята, а с $T_t = 23^h 56^m$ – периода на околоосно въртене на Земята (звездно денонощие), на който се равнява орбиталният период на геостационарния спътник. Така получаваме:

$$v_l = 2\pi r_l / T_l \approx 1.01 \text{ км / с}$$

$$v_{gs} = 2\pi r_{gs} / T_t \approx 3.07 \text{ км / с}$$

Орбитата на геостационарните спътници лежи в екваториалната равнина на Земята. Щом затъмнението е централно, за такъв спътник, и освен това е в зенита за наблюдател на екватора, то следователно Слънцето и Луната се намират също в екваториалната равнина на Земята. Това е възможно само по време на равноденствие – пролетно или есенно.

Луната се движи по орбита, която е наклонена относно еклиптиката на ъгъл $i = 5.15^\circ$. Движението на лунната сянка става в посока, която сключва ъгъл с екватора $\varepsilon + i$ или $\varepsilon - i$, в зависимост от това дали Луната е във възходящ възел на орбитата си или в нисходящ възел. Тук ε е наклонът на земния екватор към еклиптиката.



Слънцето също се движи, в система свързана със Земята, като линейната му скорост е равна на линейната скорост на Земята при движението ѝ по орбитата. Приносът на това движение е малък и сега ние ще го пренебрегнем.

От получените линейни скорости виждаме, че спътникът се движи приблизително три пъти по-бързо от Луната. Следователно той настига движещата се сянка на Луната и преминава през нея. Тъй като двете движения стават под ъгъл едно относно друго, то трябва да извадим векторно скоростите на спътника и лунната сянка, за да получим относителното им движение. Големината на относителната скорост на спътника за двата случая, възходящ и нисходящ възел, получаваме от косинусовата теорема:

$$v_{l \text{ rel}}^2 = v_{gs}^2 + v_l^2 - 2 v_l v_{gs} \cos(\varepsilon + i)$$

$$v_{l \text{ rel}} = 2.236 \text{ км/с}$$

$$v_{2 \text{ rel}}^2 = v_{gs}^2 + v_l^2 - 2 v_l v_{gs} \cos(\varepsilon - i)$$

$$v_{2 \text{ rel}} = 2.135 \text{ км/с}$$

Геостационарният спътник ще премине през по-широка част от лунната сянка и за наблюдател там пълната фаза на затъмнението няма да е само един миг. Тъй като видимият ъглов диаметър на Луната е много малък, за линейния диаметър d на лунната сянка на височината на геостационарната орбита можем да напишем следното приблизително съотношение:

$$d / 2R_l = (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

където r_{gs} е радиусът на орбитата на геостационарния спътник.

$$d = 2R_l (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

$$d \approx 333 \text{ км}$$

Времето, за което спътникът ще пресече сянката в двата случая ще бъде:

$$\Delta t = d / v_{rel}$$
$$\Delta t_1 \approx 149^s \approx 2^m 29^s$$
$$\Delta t_2 \approx 156^s \approx 2^m 36^s$$

Отчитането на движението на Слънцето, т.е. на Земята по нейната орбита, ще намали тези времена с около 4-5 секунди.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилна представа за геометрията на затъмнението и схема – 2 т.

За правилен математически метод за определяне на разстоянието между Луната и Земята – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За обяснение по кое време на годината се случва затъмнението – 2 т.

За верен математически метод за намиране на продължителността на пълната фаза – 2 т.

За отчитане на движението на Луната и определяне на относителното движение на спътника спрямо сянката – 2 т.

За отчитане на наклона на екватора към еклиптиката и наклона на лунната орбита – 2 т.

За разглеждане на двата възможни случая – 1 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето 696000 km

Маса на Юпитер 1.89×10^{27} кг

Маса на Слънцето 1.99×10^{30} кг

Гравитационна константа 6.67×10^{-11} м³ / кг.с²

Константа на Стефан-Болцман $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Вт / м² К⁴

Светимост на Слънцето 3.846×10^{26} Вт

Екваториален радиус на Земята 6378 km

Радиус на Луната 1738 km

Маса на Луната 7.35×10^{22} кг

Период на орбитално движение на Луната около Земята 27.32 денонощия

Наклон на лунната орбита към еклиптиката 5.15°

Наклон на земния екватор към еклиптиката 23.43°

Разстояние Земя – Слънце 149 600 000 km

Период на въртене на Земята около оста 23^h 56^m

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград
Възрастова група XI-XII клас – практически кръг – решения

Практическа задача. Планета около жълтобяло слънце.

Решение:

Когато планетата минава пред диска на звездата, тя закрива част от нея и блясъкът на звездата леко намалява. Да означим с E_S осветеността, която звездата създава за земния наблюдател, когато не е закрита от планетата, а с E_{S1} – осветеността, създавана от звездата, когато е закрита от планетата – по време на главен минимум на блясъка. От горната графика чрез определяне на мащаба на скалата определяме:

$$E_S \approx 1 \text{ относителна единица светлинен поток} \quad E_{S1} \approx 0.9932 \text{ отн.ед.}$$

Тези величини се отнасят приблизително както светещите площи на видимия звезден диск извън пасажа на планетата и по време на пасажа на планетата:

$$\frac{E_S}{E_{S1}} = \frac{\pi R_S^2}{\pi R_S^2 - \pi R_P^2} = \frac{R_S^2}{R_S^2 - R_P^2}$$

където R_S и R_P са радиусите на звездата и на планетата. За радиуса на звездата получаваме:

$$R_S = R_P \cdot \sqrt{\frac{E_S}{E_S - E_{S1}}} \approx 12.13 R_P \quad R_S \approx 1.154 \times 10^6 \text{ км}$$

Краят на преминаването на планетата по диска на звездата означава и край на главния минимум на кривата на блясъка. След този момент ние виждаме изцяло звездата и заедно с нея – планетата. Планетата е осветена от звездата и отразява част от тази светлина. При движението на планетата по нейната орбита около звездата, тя би трябвало да показва за нас различни фази, които все повече се доближават до пълната фаза. Ето защо общият блясък на системата звезда – планета трябва леко да нараства и това се вижда по кривата на блясъка с увеличения вертикален мащаб, представена на долната диаграма В. После планетата навлиза зад видимия диск на звездата и настъпва вторичния минимум. Спадането на блясъка след вторичния минимум се обяснява аналогично с изменящата се фаза на планетата, но в обратен ред.

Малко преди началото на вторичния минимум до нас идва светлина от целия незащитен видим диск на звездата и от незащитения диск на планетата, която е почти в пълна фаза – почти изцяло обърната към нас с осветената си страна. Тогава, осветеността, която се създава за земния наблюдател, ще бъде:

$$E_{S+P} = E_S + E_P,$$

където E_P е осветеността, идваща от огрятата страна на планетата. По време на вторичния минимум планетата е закрита и получаваме светлина само от звездата. Тогава осветеността е E_S , също както и в моментите малко преди началото и малко след края на главния минимум. На диаграмата В кривата е прекарана доста неточно и има разлика между тези две нива, но ако се вгледаме в експерименталните точки ще видим, че при по-правлно прекарване на кривата няма да има разлика. Това налага лека корекция в стойността на E_S , която ще използваме оттук нататък: $E_S \approx 0.99998$ отн.ед. По диаграмата измерваме увеличаването на блясъка в моментите малко преди и след вторичния минимум и получаваме: $E_{S+P} \approx 1.00009$ отн.ед.

Трябва да пресметнем осветеността, която звездата създава върху планетата. За целта е необходимо да знаем какво е разстоянието между двете тела. Видът на графиката свидетелства, че орбитата на планетата е кръгова. По скалата за времето на горната графика А измерваме интервала между двата главни минимума и така определяме орбиталния период на планетата:

$$T \approx 2.11 \text{ денонощия} \approx 0.00577 \text{ години}$$

Превръщаме периода в години, за да работим с удобната форма на III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = M$$

където r радиусът на планетната орбита в астрономически единици, T е орбиталният период в години, а M е масата на звездата в слънчеви маси. Оттук получаваме:

$$r = \sqrt[3]{MT^2} \quad r \approx 0.0365 \text{ AU} \approx 5.47 \times 10^6 \text{ км}$$

Осветеността, която звездата създава върху планетата, ще бъде:

$$E_{SP} = \frac{L}{4\pi r^2}$$

където L е светимостта на звездата. Общата светлинна енергия, попадаща върху планетата, ще бъде:

$$W = E_{SP} \cdot \pi R_P^2$$

Осветеността, създавана от планетата за земния наблюдател, ще бъде:

$$E_r = \frac{AW}{2\pi r_0^2}$$

където A е частта от светлината, отразявана от планетата, или нейната отразителна способност, а r_0 е разстоянието от нас до планетата (или все едно до звездата). В знаменателя коефициентът е 2, а не 4, защото приемаме планетата за диск, който отразява и разсейва светлина само в половината пространство с огряната си от звездата страна. Използвайки последните три уравнения, получаваме:

$$E_r = A \cdot \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi R_P^2 \cdot \frac{1}{2\pi r_0^2}$$

Ние не знаем светимостта на звездата и разстоянието до нея, но можем да преобразуваме този израз така:

$$E_P = A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2} \cdot \frac{L}{4\pi r_0^2}$$

Всъщност обаче:

$$\frac{L}{4\pi r_0^2} = F_S$$

Така получаваме:

$$E_P = A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2} \cdot F_S$$

По-нататък пресмятаме:

$$\frac{E_{S+P}}{E_S} = \frac{E_S + E_P}{E_S} = 1 + \frac{E_P}{E_S}$$

$$\frac{E_{S+P}}{E_S} = 1 + A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2}$$

Накрая за отразителната способност на планетата намираме:

$$A = \frac{2r^2}{R_P^2} \cdot \left(\frac{E_{S+P}}{E_S} - 1 \right) \quad A \approx 0.7$$

Според нашата оценка планетата отразява около 70% от светлината на звездата. Поради невъзможността да се направят точни измервания по графиките, оценките могат значително да варират в различните решения.

В действителност голяма част от блясъка на планетата се дължи не на отражение на светлината. Планетата поглъща лъчението на звездата, нагрява се от него до много висока температура и произлъчва погълнатата енергия. Реалната отразителна способност на планетата е много по-малка.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За правилен математически метод за определяне на радиуса на звездата – 2 т.

За измервания и определяне на величини по графиката – 1 т.

За пресмятания и верен числен резултат – 2 т.

За обяснение на вида на графиката – 3 т.

За правилен математически метод за определяне на общата светлинна енергия, получена от планетата – 3 т.

За определяне на радиуса на планетната орбита – 2 т.

За правилен математически метод за определяне на отразителната способност на планетата – 4 т.

За измервания и определяне на величини по графиката – 2 т.

За правилен числен резултат – 1 т.